E.2 Grandeurs en dynamique

E.2 Grandeurs en dynamique

1) Analyses temporelles

Le post-traitement des grandeurs temporelles ne présente pas de difficulté majeure tant que l'on ne s'intéresse pas à cibler un instant précis où à caractériser une valeur unique représentative de l'ensemble des instants couverts par l'analyse.

Pour les cas où le chargement est maîtrisé et ne présente pas de caractère aléatoire, une seule analyse peut suffire. S'il est privilégié d'extraire une grandeur scalaire représentative de l'ensemble des instants, le choix de la norme incombe à l'ingénieur qui analyse les résultats et qui devra être en mesure de le justifier. Une caractérisation statistique peut également être pertinente (percentile typiquement).

Pour le cas où l'ingénieur s'intéresse à extraire un ensemble de grandeurs constituants un vecteur, la problématique de la concomitance des grandeurs normées (valeurs absolue, maximale, minimale, ...) se pose. L'instant où un moment est maximal en un point pour un torseur ne coïncide pas nécessairement avec l'extremum d'un effort de cisaillement.

Lorsque le chargement revêt un caractère aléatoire, il importe de multiplier le nombre de cas de calculs en intégrant le caractère aléatoire du chargement. A titre d'exemple, si on considère N cas de calculs et que l'on construit pour une quantité d'intérêt $g_i(t)$ la valeur de dimensionnement G_i correspondante pour un cas i (il peut s'agit de la valeur positive max et aussi de la valeur négative max pour les intégrer ensuite dans une démarche de concomitance d'actions).

On considère :

- La valeur de dimensionnement retenue qui peut être (à titre d'exemple) :

$$G_i = \max_{t\in[t_{initial};t_{final}]}(|g_i(t)|)$$

$$G_i = \min_{t\in[t_{initial};t_{final}]}(\langle g_i(t)\rangle^{-})$$

$$G_i = \max_{t\in[t_{initial};t_{final}]}\left(\langle g_i(t)\rangle^{\mp}\right)$$

- Sa moyenne, $G = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i}{N}$
- Son écart type : $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(G_i - G)^2}$
- L'estimation de la moyenne de la population de la valeur G pour les N résultats de calculs : $D = G + \lambda(N).S$

Où λ(N) est calculé à partir de la variable de Student pour N échantillons (cas de calculs) pour un niveau de confiance 95% (unilatéral) tel que :

$$\lambda(N) = \frac{t_{0.05;N-1}}{\sqrt{N}}$$

Le tableau ci-dessous fournit des estimations de la moyenne pour des nombres de cas de calculs variables.

N calculs	$t_{0.05;N-1}$	λ(N)	N calculs	$t_{0.05;N-1}$	λ(N)	N calculs	$t_{0.05;N-1}$	λ(N)	N calculs	$t_{0.05;N-1}$	λ(N)
2	6.3137	4.46	15	1.7613	0.45	28	1.7033	0.32	41	1.6839	0.26
3	2.9200	1.69	16	1.7531	0.44	29	1.7011	0.32	42	1.6829	0.26
4	2.3534	1.18	17	1.7459	0.42	30	1.6991	0.31	43	1.6820	0.26
5	2.1318	0.95	18	1.7396	0.41	31	1.6973	0.30	44	1.6811	0.25
6	2.0150	0.82	19	1.7341	0.40	32	1.6955	0.30	45	1.6802	0.25
7	1.9432	0.73	20	1.7291	0.39	33	1.6939	0.29	46	1.6794	0.25
8	1.8946	0.67	21	1.7247	0.38	34	1.6924	0.29	47	1.6787	0.24
9	1.8595	0.62	22	1.7207	0.37	35	1.6909	0.29	48	1.6779	0.24
10	1.8331	0.58	23	1.7171	0.36	36	1.6896	0.28	49	1.6772	0.24
11	1.8125	0.55	24	1.7139	0.35	37	1.6883	0.28	50	1.6766	0.24
12	1.7959	0.52	25	1.7109	0.34	38	1.6871	0.27	51	1.6759	0.23
13	1.7823	0.49	26	1.7081	0.33	39	1.6860	0.27	55	1.6620	0.22
14	1.7709	0.47	27	1.7056	0.33	40	1.6849	0.27	60	1.6558	0.21

2) Analyses spectrales sismiques

Les analyses spectrales sismiques fournissent des grandeurs représentatives de la moyenne d'un extremum où cours du temps.

L'objet de ce paragraphe est d'attirer l'attention du lecteur sur des précautions importantes à prendre pour éviter de commettre des erreurs importantes dans le calcul de résultats issus d'un cumul quadratique.

Comme cela est évoqué dans le chapitre dynamique, il est possible de cumuler quadratiquement simplement ou de manière complète les réponses spectrales de chaque mode. Le résultat de ces cumuls est une valeur positive.

Il importe de considérer que toute opération que l'on souhaite réaliser sur une quantité d'intérêt qui fait l'objet d'un cumul quadratique (simple ou complet) des réponses spectrales de chaque mode doit être réalisée avant le cumul.

Prenons une illustration simple avec la différence entre le déplacement de deux nœuds A et B cumulés simplement sur 2 modes 1 et 2 (une illustration avec une combinaison CQC serait juste plus lourde en écriture en faisant intervenir les termes croisés) :

En toute rigueur, la différence évoquée à titre d'exemple s'écrit :

$$(d_A - d_B)_{SRSS} = \sqrt{\left(d_{A,1} - d_{B,1}\right)^2 + \left(d_{A,2} - d_{B,2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{d_{A,1}^2 + d_{A,2}^2 + d_{B,1}^2 + d_{B,2}^2 - 2\left(d_{A,1}d_{B,1} + d_{A,2}d_{B,2}\right)}$$

Il est donc assez évident de voir qu'estimer a posteriori du cumul la différence est largement erroné :

$$d_{A,SRSS} - d_{B,SRSS} = \sqrt{d_{A,1}^2 + d_{A,2}^2} - \sqrt{d_{B,1}^2 + d_{B,2}^2}$$

La première valeur est toujours positive mais elle intègre des écarts algébriques de quantités sur un même mode. La seconde expression peut en outre conduire à sous-estimer drastiquement une réponse extremum. On peut par ailleurs démontrer en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwartz que la première estimation est la borne supérieure de la valeur absolue du calcul erroné présenté dans la seconde formule.

On peut également prendre une illustration plus complexe avec l'estimation d'une contrainte de von Misès sur la base des contraintes principales pour 2 modes :

$$(\sigma_{VM})_{SRSS}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{I,1} - \sigma_{II,1}\right)^2 + \left(\sigma_{I,1} - \sigma_{III,1}\right)^2 + \left(\sigma_{II,1} - \sigma_{III,1}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{I,2} - \sigma_{II,2}\right)^2 + \left(\sigma_{I,2} - \sigma_{III,2}\right)^2 + \left(\sigma_{II,2} - \sigma_{III,2}\right)^2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{I,1} - \sigma_{II,1}\right)^2 + \left(\sigma_{I,1} - \sigma_{III,1}\right)^2 + \left(\sigma_{II,1} - \sigma_{III,1}\right)^2 + \left(\sigma_{I,2} - \sigma_{II,2}\right)^2 + \left(\sigma_{I,2} - \sigma_{III,2}\right)^2 + \left(\sigma_{II,2} - \sigma_{III,2}\right)^2}$$

Une estimation a posteriori du cumul des contraintes de von Misès est largement erronée :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{I,SRSS}-\sigma_{II,SRSS}\right)^2+\left(\sigma_{I,SRSS}-\sigma_{III,SRSS}\right)^2+\left(\sigma_{II,SRSS}-\sigma_{III,SRSS}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\sigma_{I,1}^2+\sigma_{I,2}^2}-\sqrt{\sigma_{II,1}^2+\sigma_{II,2}^2}\right)^2+\left(\sqrt{\sigma_{I,1}^2+\sigma_{I,2}^2}-\sqrt{\sigma_{III,1}^2+\sigma_{III,2}^2}\right)^2+\left(\sqrt{\sigma_{II,1}^2+\sigma_{II,2}^2}-\sqrt{\sigma_{III,1}^2+\sigma_{III,2}^2}\right)^2}$$

Exemple d'application spécifique : *estimation de l'ouverture d'un joint entre deux bâtiments*

En ingénierie sismique, il est nécessaire d'estimer l'ouverture d'un joint entre deux bâtiments sous séisme pour garantir que l'on se prémunira de tout risque d'entrechoquement. La pratique admise consiste à calculer indépendamment les valeurs extrêmes de déplacement de l'enveloppe de chaque bâtiment sur la base d'un cumul quadratique puis d'évaluer l'ouverture maximale du joint en calculant la différence entre ces deux valeurs positives. On prend ainsi en compte une opposition de phase défavorable des réponses maximales.

Révision #1
★Créé 8 December 2023 13:58:11 par Paul Terrasson Duvernon
Mis à jour 12 December 2023 10:44:00 par Paul Terrasson Duvernon