E.1 Généralités

E.1 Généralités

Les différentes grandeurs post-traitées peuvent différer très significativement en fonction de la finalité de l'analyse faite par éléments finis.

Typiquement, les grandeurs étudiées au titre d'études de prédimensionnement (esquisse ou Avant Projet Sommaire) sont très différentes de ce que l'on va chercher à obtenir en Avant Projet Détaillé et a fortiori en études d'exécution. Lorsqu'il s'agit d'analyser le comportement d'un ouvrage existant pour quantifier un éventuel risque structurel les quantités d'intérêt sont encore différentes.

On serait tenté de considérer :

- Phases de prédimensionnement (esquisse, APS, …) : grandeurs de type déplacements, flèches rapportées à des portées, etc …,
- Phases de dimensionnement : densités de ferraillage pour des plaques, sections de ferraillage pour des poutres et poteaux, ouverture de fissure, …
- Analyse structurelle : états de contraintes (contraintes principales dans le béton: directions, signes, tri-axialité et valeurs, comparaison à des critères, par exemple Ottosen, Rankine, Drucker-Prager si l'analyse est élastique), déformations principales directions, valeurs et signes, cartes d'endommagement, contraintes dans les aciers, déformations plastiques, …

Enfin, il importe de garder à l'esprit que toutes les quantités d'intérêt ne sont pas accessibles pour tous les différents types d'éléments et modèle de comportement. En effet, le type d'élément conditionne la nature des degrés de liberté : on n'a pas accès à des rotations aux nœuds et pas de moments vec des éléments volumiques de base. De la même façon, un modèle de plasticité ne peut fournir de valeurs d'endommagement. Ces éléments peuvent paraître triviaux mais ils sont suffisamment souvent oubliés par les utilisateurs des codes de calcul qu'il nous paraissait utile de le rappeler ici.

1. Contraintes et déformations

Comme cela est exposé dans le chapitre « Généralités », les champs de contraintes et déformations ne sont pas des produits de calcul directs d'une résolution d'un problème de mécanique par un solveur aux éléments finis. Ils sont déduits des déplacements par dérivations des champs interpolés de déplacements. On note en conservant les notations du chapitre généralités :

$$\boldsymbol{\varepsilon = D.u = D.(N.q) = (D.N).q = B.q}$$

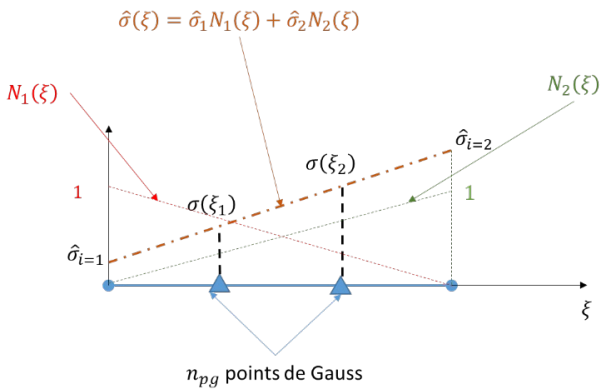
En élasticité linéaire, la relation contrainte – déformation s'écrit (avec H la matrice de Hooke) :

$$\boldsymbol{\sigma = H.\varepsilon = H.B.q}$$

Dans ce genre de démarche, les champs de contrainte et de déformation évoluent selon des fonctions d'interpolation de degré inférieur à celle des déplacements.

En analyse non linéaire les contraintes et déformations ne peuvent pas être ainsi évaluées par un produit de la matrice de Hooke et de la dérivée des déplacements nodaux et s'appuient sur les valeurs aux points de Gauss pour un élément en faisant appel aux fonctions de forme pour les extrapoler sur le reste de l'élément et aux nœuds. Cette démarche permet en outre de faire en sorte que les contraintes évoluent selon le même degré que les fonctions d'interpolation et non leurs dérivées.

A titre d'exemple, sur un élément qui a n nœuds, n_{pg} points de Gauss situés aux coordonnées ξn_{pg}, munis de fonctions de forme N_i, on retient la minimisation au sens des moindres carrés entre le champ interpolé évalué à partir des valeurs nodales recherchées et les valeurs gaussiennes connues.



Construction des valeurs nodales élémentaires à partir des valeurs aux points de Gauss en 1D

Soit donc il s'agit de minimiser la fonctionnelle :

$$Q(\hat{\sigma}_i) = \sum_{k=1}^{n_{pg}} [\sigma(\xi_k) - \hat{\sigma}(\xi_k)]^2 = \sum_{k=1}^{n_{pg}} \left[\sigma(\xi_k) - \sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i N_i(\xi_k)\right]^2$$

$$\frac{\partial Q(\hat{\sigma}_i)}{\partial \hat{\sigma}_i} = 0$$

Soit pour chaque nœud *i* parmi les *n* nœuds de l'élément :

$$\sum_{k=1}^{n_{pg}} \sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j N_i(\xi_k) N_j(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n_{pg}} \sigma(\xi_k) N_i(\xi_k)$$

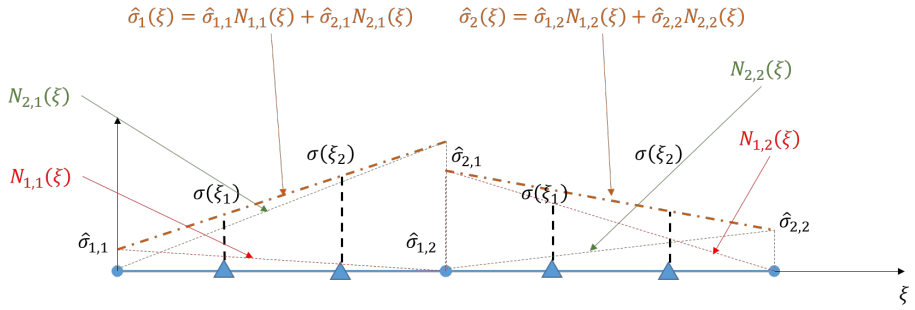
Qui peut se mettre sous une forme matricielle dont les matrices sont connues une fois pour toute pour les éléments isoparamétriques de référence :

$$\underbrace{M}_{matrice\ n \times n} \quad \hat{\sigma} = \quad \underbrace{P}_{matrice\ n \times n_{pg}} \quad \sigma_{Gauss}$$

Et donc, on obtient directement les valeurs nodales de contrainte :

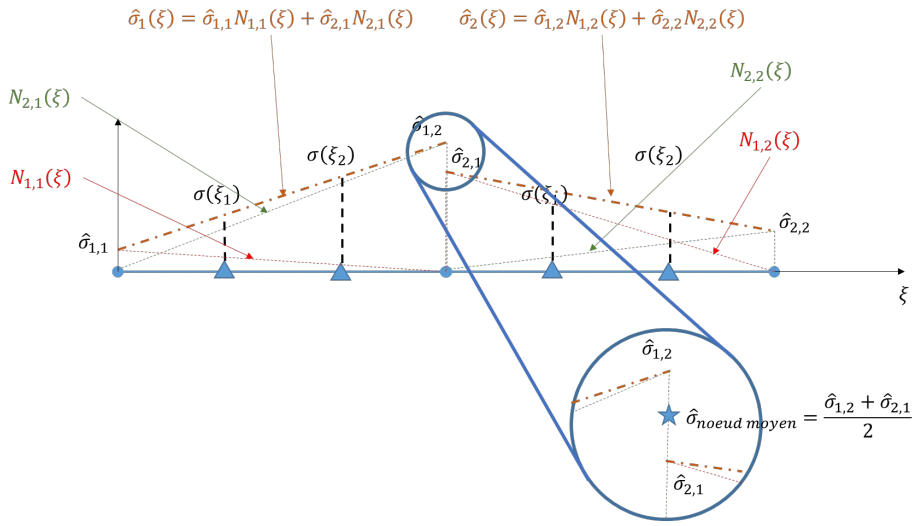
$$\hat{\sigma} = M^{-1} P \sigma_{Gauss}$$

Il peut donc exister plusieurs valeurs nodales de déformation ou de contrainte pour un nœud commun à plusieurs éléments. Les valeurs nodales doivent être déduites à partir de ces valeurs.



Discontinuité des valeurs nodales élémentaires en 1D

Il existe diverses méthodes permettant de reconstituer la continuité des déformations ou des contraintes (si les matériaux sont les mêmes entre deux éléments contigus) en ayant une seule valeur nodale de déformation (ou de contrainte). Il s'agit de lissage des champs de contrainte et de déformation par certains codes de calculs sur la globalité de la géométrie (par minimisation au sens des moindres carrés) ou par des moyennes des valeurs provenant pour un nœud des éléments auxquels il appartient tel que cela figure dans la figure 3 pour un cas 1D.



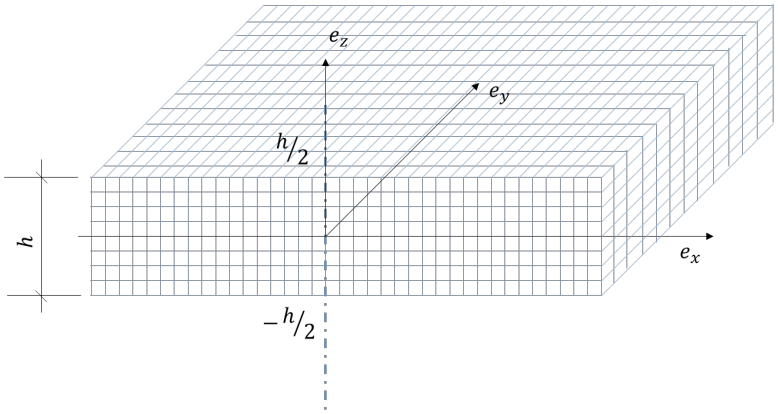
Exemple de construction d'une valeur nodale moyenne des valeurs nodales élémentaires en 1D

Pour des raisons de visualisations on peut préférer de faire apparaître des grandeurs élémentaires lissées. Cependant, lorsqu'il s'agit de rechercher de la précision les grandeurs calculées et déduites au point de Gauss seront à privilégier.

2. Passage des contraintes de la mécanique des milieux continus aux efforts de la mécanique des structures

Les méthodes automatisées de calcul de ferraillage s'appuient sur des algorithmes en flexion composée sur base de torseurs de type plaque et coque à 8 composantes ou en flexion composée déviée sur base torseurs de type poutre à 6 composantes.

Certains ouvrages peuvent nécessiter pour diverses raisons de prendre en compte une modélisation volumique de l'ouvrage (barrage, structures de types réservoirs précontraints : réservoir de Gaz Naturel Liquéfié, enceintes de confinement). Pour décliner une démarche calculatoire sur base de torseurs à 8 composantes, il est nécessaire de reconstruire des efforts internes de mécanique des structures à partir des champs de contraintes le long de segments comme cela est exposé figure ci-dessous.



Segment le long duquel les contraintes servent de référence pour la reconstruction d'un torseur coque

On considère le tenseur des contraintes exprimé le long du segment de la figure précédente :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yx} \\ Sym. & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

En toute rigueur, pour une plaque mince satisfaisant les hypothèses de Kirschhof-Loeve, on considère le torseur coque à 10 composantes que l'on associe aux contraintes suivant le principe d'équivalence :

$$\begin{cases} N_x = N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}.dz \; ; \; N_y = N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}.dz \\ V_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}.dz \; ; \; V_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx}.dz \; ; \\ V_x = V_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}.dz \; ; \; V_y = V_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}.dz \\ M_x = M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}.z.dz \; ; \; M_y = M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}.z.dz \\ M_{yx} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx}.z.dz \; ; \; M_{xy} = N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}.z.dz \end{cases}$$

Cette intégration continue est en réalité discrète le long du segment et typiquement peut se réaliser à parti des valeurs des contraintes exprimées au point de Gauss ou aux nœuds.

Diverses techniques d'intégration peuvent être utilisées (Trapèze, Gauss, Lobatto, etc …).

On conservera par la suite et à des fins de simplicités une expression continue même si celle-ci n'est pas rigoureuse dans le contexte discrétisé des valeurs obtenues par éléments finis.

Compte tenu du théorème de Cauchy égalisant les contraintes de cisaillement de facettes adjacentes, ce torseur se réduit à 8 composantes :

$$\begin{cases} N_x = N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}.dz \ ; \ N_y = N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}.dz \\ V_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}.dz \ ; \ V_x = V_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}.dz \ ; \ V_y = V_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}.dz \\ M_x = M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}.z.dz \ ; \ M_y = M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}.z.dz \ ; \ M_{xy} = N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}.z.dz \end{cases}$$

Considérer que cette plaque est une dalle isotrope conduit à négliger les contributions des efforts de membrane.

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ N_y = 0 \\ V_{xy} = V_{yx} = 0 \end{cases}$$

Il ressort donc un torseur à 5 composantes (en considérant que la notation M_x désigne le moment sollicitant les aciers dans la direction e_x) qui sont les actions mécaniques internes d'un élément plaque :

$$\begin{cases} V_x = V_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}.dz \rightarrow (1) \\ V_y = V_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}.dz \rightarrow (2) \\ M_x = M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}.z.dz \rightarrow (3) \\ M_y = M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}.z.dz \rightarrow (4) \\ M_{xy} = N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}.z.dz \rightarrow (5) \end{cases}$$

(1) Effort tranchant hors plan (direction z) pour la facette de normale x,

(2) Effort tranchant hors plan (direction z) pour la facette de normale y,

(3) Moment de flexion faisant travailler les aciers dans la direction x,

(4) Moment de flexion faisant travailler les aciers dans la direction y,

(5) Moment de torsion de la section de la dalle de normal x ou y.

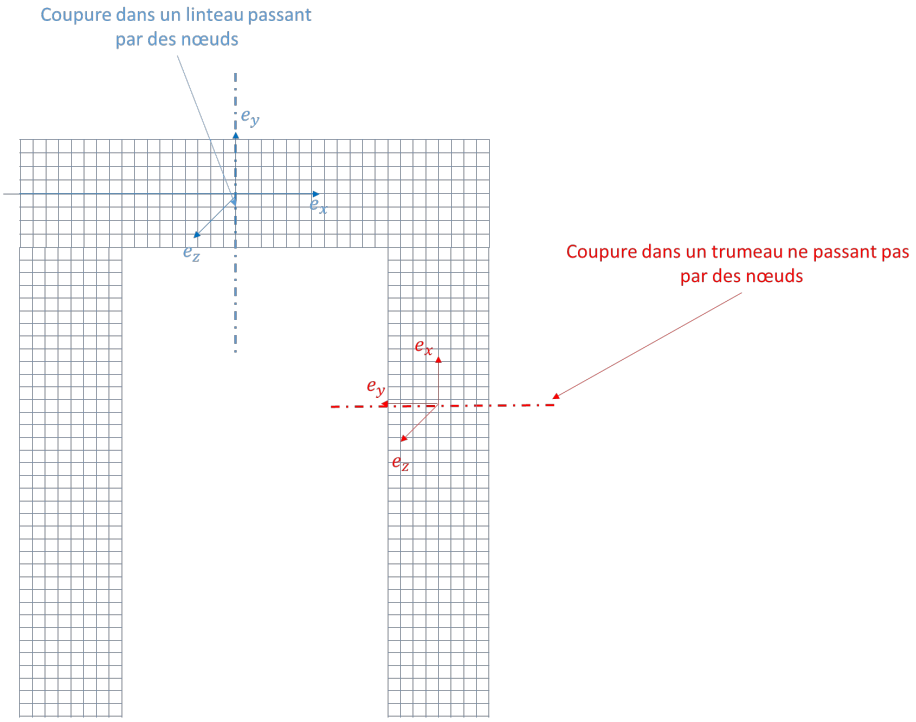
3. Méthode des coupures : éléments de réduction élémentaires (EF) à éléments de réduction structurels de type poutre

Dans certains les contraintes du projet peuvent amener à modéliser intégralement une structure par plaque y compris dans des zones où celles-ci ne sont pas appropriées tels que les trumeaux et les linteaux.

Dans ces zones, il incombe de reconstituer un torseur de type poutre pour apprécier plus proprement le comportement local, en particulier pour estimer le ferraillage requis.

Une pratique répandue répondant à ce besoin est la réalisation de coupures et l'estimation des efforts sur cette coupure.

La coupure doit est choisie judicieusement de façon à adhérer aux hypothèses d'Euler-Bernoulli concernant les sections de type qui doivent rester planes et droites. C'est généralement le cas des trumeaux et linteaux.



Exemple de coupures dans un linteau ou un trumeau passant ou ne pas passant pas par des nœuds

On construit dans le repère local de la coupure les éléments de réduction de poutre à part des éléments de réduction de coque. Ceux-ci peuvent être des efforts aux nœuds ou des efforts évalués en un point quelconque de l'élément coïncidant avec la ligne de coupure et évalués au moyen des fonctions de forme élémentaires.

On écrit dans le cas de l'exemple de la figure 5 pour la ligne de coupure du linteau où le repère global et le repère de la ligne coïncident :

$$\begin{cases} N = \int_0^{l_{coupure}} N_{xx}.dy \rightarrow (1) \\ V_y = \int_0^{l_{coupure}} N_{xy}.dy \rightarrow (2) \\ V_z = \int_0^{l_{coupure}} N_{xz}.dy \rightarrow (3) \\ M_z = \int_0^{l_{coupure}} N_{xx}.y.dy \rightarrow (4) \\ M_y = \int_0^{l_{coupure}} M_{xx}.dy \rightarrow (5) \\ M_x = \int_0^{l_{coupure}} M_{xy}.dy + \int_0^{l_{coupure}} V_{xz}.y.dy \rightarrow (6) \end{cases}$$

(1) Effort normal à la section de la poutre assimilée i.e. la coupure,

(2) Effort tranchant dans le plan,

(3) Effort tranchant hors plan,

(4) Moment de flexion dans le plan,

(5) Moment de flexion hors plan,

(6) Moment de torsion.

Révision #2
★Créé 8 December 2023 13:50:29 par Paul Terrasson Duvernon
Mis à jour 12 December 2023 10:44:00 par Paul Terrasson Duvernon