B.2 Analyses reposant sur une intégration temporelle directe

B.2 Analyses reposant sur une intégration temporelle directe

Les schémas d'intégration

Grands principes

Le principe des différentes méthodes d'intégration directe est de découper l'intervalle d'étude en n intervalles de longueur $\Delta t = T/n$ et de vérifier l'équilibre aux instants discrets $T_i = i\,\Delta t = i\,T/n$. La différence entre les différentes méthodes (différences centrées, Wilson, Newmark…) repose sur l'hypothèse qui est faite sur la variation des grandeurs cinématiques sur l'intervalle Δt.

Schéma explicite :

Si la valeur de déplacement peut être calculée directement à partir de la ou des valeurs au pas de temps précédents, la résolution est dite *explicite*. Dans ce cas, l'équilibre est considéré en début d'incrément.

Schéma implicite :

Les méthodes *implicites* sont celles pour lesquelles l'équilibre doit être considéré à la fin de l'intervalle, ce qui nécessite la résolution d'un système linéaire.

Comme indiqué plus haut, il existe un grand nombre de schémas d'intégration et l'objectif n'est pas ici d'en faire une description exhaustive (voir pour cela des ouvrages spécialisés). Nous nous contentons d'en présenter deux, la méthode des différences centrées, méthode explicite conditionnellement stable et la méthode de Newmark, schéma inconditionnellement stable (pour les problèmes linéaires).

Un schéma est dit *inconditionnellement stable* si, pour n'importe quelles conditions initiales, la solution reste bornée quel que soit le pas Δt choisi , en particulier lorsque $\Delta t/T$ est grand. Par opposition, une schéma est conditionnellement stable si la solution obtenue reste bornée seulement si Δt reste inférieur à une valeur limite Δt_{crit}.

La *précision* est un concept différent de la stabilité, qui prend toute son importance pour les schémas inconditionnellement stables. Au-delà des inévitables erreurs d'arrondi, la précision agit sur deux sources d'approximations : un allongement (artificiel) de la période et une diminution de l'amplitude. L'influence de ces deux phénomènes augmente avec l'augmentation de Δt mais de manière indépendante.

Méthode des différences centrées

Il s'agit d'un schéma de type différences finies reposant sur l'approximation de l'accélération (développement de Taylor au second ordre) :

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) = \frac{1}{\Delta t^2}(\boldsymbol{q}(t+\Delta t) - \Delta\, \boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{q}(t-\Delta t))$$

Pour obtenir le même ordre d'erreur sur la vitesse, on utilise :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

Les déplacements à l'instant $t+\Delta t$ sont obtenus en considérant l'équilibre à l'instant t :

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \tilde{\boldsymbol{f}}(t)$$

Soit, en introduisant les approximations de l'accélération et de la vitesse :

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{f}(t) - \left(\boldsymbol{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{q}(t) - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \frac{1}{2\Delta t}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{q}(t-\Delta t)$$

De la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \tilde{\boldsymbol{f}}(t)$$

Cette méthode nécessite une procédure de démarrage afin de calculer $\boldsymbol{q}(-\Delta t)$ (à partir de l'équilibre à t=0). L'amortissement introduit par ce schéma est nul (pas de décroissance d'amplitude).

Méthode de Newmark

Ce schéma repose sur les approximations suivantes de la vitesse et du déplacement en fin d'intervalle :

$$\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{q}(t) + \Delta t\,\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \Delta t^2\left(\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \alpha\ddot{\boldsymbol{q}}(t+\Delta t)\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t+\Delta t) = \dot{\boldsymbol{q}}(t) + \Delta t\left((1-\delta)\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \delta\ddot{\boldsymbol{q}}(t+\Delta t)\right)$$

De la valeur des 2 paramètres α et δ (compris entre 0 et 1) dépendent la précision et la stabilité de la méthode : le couple (δ = 1/2 et α = 1/4) conduit au schéma inconditionnellement stable appelé méthode de Newmark : il correspond à considérer l'accélération moyenne constante. En considérant l'équilibre à la fin de l'intervalle d'étude (à l'instant t+Δt), on obtient :

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\,\boldsymbol{q}(t+\Delta t) = \tilde{\boldsymbol{f}}(t+\Delta t)$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} + a_0\boldsymbol{M} + a_1\boldsymbol{C}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(t+\Delta t) = \boldsymbol{f}(t+\Delta t) + \boldsymbol{M}\left(a_0\boldsymbol{q}(t) + a_2\dot{\boldsymbol{q}}(t) + a_3\ddot{\boldsymbol{q}}(t)\right) + \boldsymbol{C}\left(a_1\boldsymbol{q}(t) + a_4\dot{\boldsymbol{q}}(t) + a_5\ddot{\boldsymbol{q}}(t)\right)$$

les coefficients étant définis ci-dessous :

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\ ;\ a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\ ;\ a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}\ ;\ a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1\ ;\ a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1\ ;\ a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)$$

Ce schéma nécessite également une procédure de démarrage : la valeur de q¨(0) est obtenue en considérant l'équilibre à t=0. Comme la méthode des différences centrées, le schéma de Newmark de base (δ = 1/2 et α = 1/4) n'introduit pas d'amortissement numérique. Le couple (α = 0, δ = ½) permet de retrouver la méthode des différences centrées.

Choix de la discrétisation spatiale et temporelle

<u>Critère sur les tailles d'éléments satisfaisant les longueurs d'ondes</u>

Différents critères peuvent intervenir qui sont directement liés à la précision des résultats attendus et au type de calcul qui est entrepris.

Pour les analyses transitoires, la recommandation généralement retenu est d'avoir de l'ordre de 8 à 10 éléments par longueur d'onde. Les ondes stationnaires étant constitués de la somme d'ondes propagatives, les analyses en dynamique stationnaire (cas des séismes typiquement) verront s'appliquer le même type de critère.

On rappelle l'expression générale reliant longueur d'onde λ, fréquence f et célérité c de l'onde ou encore la pulsation ω est :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

En fonction des types d'éléments utilisés et du type d'onde qui retient notre intérêt, on retiendra les différentes formulations suivantes :

Éléments volumiques dans un milieu isotrope (cas type d'une modélisation d'un sol élastique de module E, de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ) :

- Onde de cisaillement : $c_{\text{cisaillement}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$
- Onde de compression : $c_{\text{compression}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\nu^2)}}$

Éléments coques isotropes :

- Onde de flexion : $c_{\text{flexion}} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$ où h est l'épaisseur de la coque, D le coefficient de raideur flexionnel.
- Onde de cisaillement : $c_{\text{cisaillement}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$
- Onde de compression : $c_{\text{compression}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\nu^2)}}$

Ces formulations s'écrivent plus généralement de la façon suivante pour un milieu anisotrope avec 2 directions principales 1 et 2 :

- Onde de flexion : $c_{\text{flexion}} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{D_{1/2}}{\rho h}} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{E_{1/2}h^2}{12\rho(1-\nu_1\nu_2)}}$
- Onde de cisaillement : $c_{\text{cisaillement}} = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1E_2}}{2\rho(1+\sqrt{\nu_1\nu_2})}}$ (expression valable en coque et plaque et en volume),
- Onde de compression : $c_{\text{compression}} = \sqrt{\frac{E_{1/2}}{2\rho(1-\nu_1\nu_2)}}$ (expression valable en coque et plaque et en volume).

On peut trouver la taille requise pour cibler une fréquence de coupure de 40 Hz dans des éléments coques et plaques ou dans des éléments volumiques. La taille requise est donnée par le nombre ci-dessous / λ pour 10 éléments.

Types de modélisations	Fréquence cible [Hz]	Epaisseur [m]	Type d'onde	Coeff de taille d'élément
Coques et briques - GC Béton	40	0,2	Flexion	0,59
	40	0,25	Flexion	0,66
	40	0,5	Flexion	0,93
	40	1	Flexion	1,32
	40	1,5	Flexion	1,61
	40	-	Cisaillement	6,04
	40	-	Compression	6,75
Coques et briques - Méca Acier	40	0,01	Flexion	0,16
	40	0,02	Flexion	0,22
	40	0,1	Flexion	0,50
	40	-	Cisaillement	8,02
	40	-	Compression	9,58

Ce critère n'est pas nécessairement suffisant et, pour les cas où une analyse temporelle par projection sur base modale ou une réponse spectrale est recherchée, une analyse de sensibilité doit être mené afin d'observer si un raffinement de maille conduit à faire varier significativement les facteurs de participation modaux (ou alors la masse modale si ce critère est scruté). Ces éléments sont décrits plus loin dans ce chapitre et leur lien sont exposés.

Critère sur les pas de temps

Les schémas temporels conditionnellement stables comme le schéma des différences centrées doivent satisfaire une condition sur le pas de temps choisi. On appelle souvent cette condition la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy).

Cas non amorti	Cas amorti
Satisfait pour $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}$	Satisfait pour $\Delta t \leq \frac{2\left(\sqrt{1+\xi^2}-\xi\right)}{\omega_{max}}$

Exemple d'application pour un modèle de treillis métallique dont le plus petit élément est de longueur L :

On considère un élément barre à 2 nœuds notés 1 et 2.

Les barres sont de longueur L, de section A et de masse volumique ρ et de module d'Young E.

On considère la matrice masse telle que la masse totale est répartie également aux deux extrémités.

Les matrices **K** et **M** s'expriment respectivement sous la forme :

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{M} = \frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'exprime tel que :

$$det\left(\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} - \omega^2\frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0$$

Ce qui conduit à :

$$\omega_{max} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Comme la vitesse de propagation des ondes de compressions dans un milieu continu s'exprime par :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On trouve que :

$\omega_{max} = \frac{2c}{L}$ et $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}$ soit $\Delta t \leq \frac{L}{c}$

Dans un modèle dont le maillage n’est pas régulier, c’est le plus petit pas de temps qui pilote le pas temps global.

Révision #2
★Créé 8 December 2023 11:05:18 par Paul Terrasson Duvernon
✎Mis à jour 12 December 2023 10:44:00 par Paul Terrasson Duvernon