B.1 Analyses reposant sur une recherche modale

B.1 Analyses reposant sur une recherche modale

Rappel sur la notion d'oscillateur simple – Notion de spectre de réponse élastique

Dans la suite de cette section, beaucoup de méthodes employées renvoient vers la réponse d'oscillateur amorti à un degré de liberté souvent dénommé oscillateur simple.

On rappelle très brièvement les grandes lignes de son comportement ici.

On se propose d'expliciter son comportement en reprenant l'équation de la dynamique appliquée à un oscillateur à un degré de liberté soumis à un chargement temporel harmonique et en bâtissant sa fonction de transfert paramétrée par le ratio entre sa pulsation propre et celle du chargement harmonique ainsi que son taux d'amortissement critique.

On rappelle l'expression de l'équilibre dynamique appliquée au système masse, ressort et amortisseur à un seul degré de liberté.

Qui s'écrit également sous forme canonique en divisant tous les termes par la masse m telle que :

Si on applique un chargement harmonique , on peut trouver la fonction de transfert en réponse absolue en établissant le rapport entre ce chargement d'entrée et la réponse absolue de sortie ci-dessous :

La norme de cette fonction est l'amplitude de la fonction de transfert qui permet de mettre en évidence le phénomène d'amplification dynamique illustrée pour différentes valeurs de taux d'amortissement critique sur la figure 1. L'argument de cette fonction de transfert est la phase.

Fonction de transfert

Un spectre de réponse est différent d'une fonction de transfert. On appelle spectre de réponse élastique la courbe donnant l'accélération (dénommée spectrale) en fonction de la période (ou de la fréquence). Le spectre correspond à l'accélération absolue maximale vue par un oscillateur simple au cours du temps en fonction de sa période propre (ou de sa fréquence propre) et de son taux amortissement critique. Il dimensionne le mouvement sismique. Il est possible de construire une relation approchée entre le spectre de Fourier d'une accélération et le spectre en vitesse spectrale pour un taux d'amortissement nul.

A partir de l'équation de la dynamique de l'oscillateur simple soumis à une accélération quelconque :

On trouve les réponses maximales à partir de sa résolution en temps par une méthode de son choix (intégration de Duhamel, calcul direct …) puis par le calcul des valeurs dites spectrales de déplacement relatif, vitesse relative et accélération absolue :

La notion de pseudo-déplacement, vitesse ou accélération est souvent employée. Il s'agit d'une approximation de ces quantités à partir de l'une d'elle reposant sur le fait que le taux d'amortissement est assez faible (moins de 20%).

Un spectre peut se présenter sous la forme de la figure 2.

Spectre

Notion de base modale

On considère que la réponse de la structure s'appuie sur une combinaison de réponses harmoniques. A ce titre, les réponses harmoniques sont des champs solutions ***q***(t) de l'équation :

Ils peuvent donc s'écrire sous la forme :

Si l'on fait l'hypothèse de Basile (on néglige ***C***), on arrive à rechercher les solutions de l'équation algébrique :

Si l'on ne fait pas l'hypothèse de Basile, cela revient à rechercher les modes complexes ; on postule :

et on résout le problème aux valeurs propres :

Pour y parvenir, sans négliger ***C***, il a fallu poser :

Avec les matrices ***A*** et ***B*** telles que :

et

On désigne aussi par ***γ*** le vecteur tel que :

On recherche les solutions sous la forme de paires d'harmoniques complexes conjuguées telles que :

avec :

- $\boldsymbol{\psi_i}$ qui est un vecteur déformée modale complexe,
- λ_i qui est une fréquence propre complexe.

Dans tous les cas, réel ou complexe, on a donc à résoudre une équation en λ_i^2 de même degré N (2N pour les cas complexes) que l'ordre de la matrice N (2N pour les cas complexes). L'ordre de cette matrice est égal au nombre de degrés de libertés du système discrétisé (le double pour les cas complexes). L'équation évoquée n'est autre que les cas de nullité du déterminant de cette matrice et donc de son polynôme caractéristique.

A des fins de simplification, on considère par la suite le cas de modes réel avec l'hypothèse de Basile.

A chaque pulsation ω_i est associé un vecteur propre. Celui-ci va être recherché en fixant une de ses composantes à 1, puis un système à n-1 paramètres est résolu.

Attention : les modes sont donc définis à une constante multiplicative près, d'autant qu'ils sont par la suite normés au moyen de procédés variables. Le plus courant pour les codes EF est de normer les modes au moyen de la matrice masse ; ce point est détaillé par la suite. Ils peuvent être également normés par leur plus grand déplacement modal.

Les modes propres ont la propriété d'être orthogonaux pour la matrice de masse, ce qui se formule comme suit :

En l'absence de chargement, les modes n'ont aucun sens physique. On peut donc choisir de les normer de différentes façons pour rendre leur visualisation compréhensible. A ce titre, il est le plus souvent rencontré dans les codes EF :

- de normer les modes sur la matrice masse, on a alors :

- de normer les modes à partir d'un mode en particulier.

Pour les cas où le code ne norme pas cette valeur, on désigne cette grandeur par le terme de masse généralisée et on écrit pour le mode i :

L'objet de ce document étant de traiter des études conduites par les codes EF, on retiendra que les modes sont normés sur la matrice masse et donc la masse généralisée est toujours égale à l'unité.

On construit également la grandeur appelée masse modale qui permet d'identifier la quantité de masse de la structure entraînée par un mode dans une direction donnée Δ_k:

Attention : la masse modale est une grandeur bien différente de la masse généralisée comme l'équation ci-dessus permet de le mettre en évidence.

Utilisation de la base modale

<u>Réponse temporelle par projection sur base modale</u>

Une solution à l'équation globale :

peut être décomposée sur la base de vecteurs propres orthogonaux en N problèmes indépendants qui sont ceux décrivant la réponse d'un oscillateur simple $r_i(t)$:

Pour les cas de séisme, le chargement ***f***(t) est un chargement inertiel appliqué à l'ensemble de la structure :

.

Analyse harmonique

On s'intéresse dans ce type d'analyse à construire une fonction de réponse en fréquence de la structure aux différents nœuds du modèle. Cette réponse peut être une quantité d'intérêt quelconque (déplacement, vitesse, accélération – absolus ou relatifs –, efforts …) en fonction d'une gamme de chargements harmoniques d'entrée qui peuvent également être décrits de différentes façons semblables à la quantité d'intérêt extraite.

Le chargement imposé sur un ensemble quelconque de nœuds de la structure est dans ce cas précis une harmonique du type :

.

Le résultat de l'analyse en tout nœud de la structure est une fonction de transfert complexe dont la norme (l'amplitude) et l'argument (la phase) sont le plus généralement utilisés. Ils permettent d'identifier les résonnances de la structure ou de l'équipement et de connaître l'amplitude de sa réponse à différents chargements harmoniques.

Troncature de base modale – Cas général

En règle générale, comme on ne peut pas extraire par calcul tous les modes (trop coûteux et long, voire numériquement inatteignable dans certains cas), il faut se contenter de ceux susceptibles de répondre au chargement de la structure.

Si la fréquence représentative retenue pour le chargement est f_c (Hz) on cherchera à extraire les modes jusqu'à 2 f_c.

Il est important également de veiller à bien représenter les modes susceptibles de contribuer localement.

Une recherche de mode ne doit pas s'accompagner d'une lecture de valeurs de fréquences mais d'une visualisation de leurs déformées.

Révision #1
Créé 8 December 2023 10:56:53 par Paul Terrasson Duvernon
Mis à jour 12 December 2023 10:44:00 par Paul Terrasson Duvernon