A2. Dimensionalité de la modélisation

A2. Dimensionnalité de la modélisation

Il est indispensable de transformer le problème réel autrement dit de le simplifier pour modéliser l'interaction entre la structure et son environnement. Pour ce faire, il existe 2 techniques :

- La première est de passer d'un problème spatial à un problème de dimension réduite tel que l'**axisymétrie** ou le **2D plan** (en contraintes planes ou en déformations planes). Elle permet une réduction de l'espace (cf. §2.2).
- La seconde permet de rester dans la dimension **3D** mais en tenant compte d'une réduction du modèle grâce à des hypothèses cinématiques. Ceci est constaté lors du passage à la **théorie des poutres, des plaques ou des coques** (cf. §2.1).

Ces 2 techniques induisent des coûts de calcul réduits. En revanche, l'utilisateur doit faire très attention à la simplification employée car cette dernière fait appel à des hypothèses qui doivent rester dans le domaine de validité du problème réel afin d'obtenir des résultats pertinents.

1) Cas des éléments finis de RDM

Du point de vue des éléments finis, la différence essentielle entre MMC et RdM concerne la géométrie qui est simplifiée moyennant des hypothèses supplémentaires : le problème tridimensionnel initial est alors ramené à un problème bidimensionnel (surface moyenne pour les plaques et coques) ou unidimensionnel (fibre moyenne pour les barres et poutres), mais représenté dans un espace tridimensionnel (à la différence des problèmes plan, cf. ci-dessous). Lorsque la MEF est utilisée pour résoudre un problème de RdM, les éléments finis sont donc des éléments spécifiques, pour lesquels il faudra fournir des caractéristiques géométriques (section, inerties pour les poutres, épaisseur pour les plaques et coques). De plus, ils combinent les effets de traction/compression (pour les poutres), ou de membrane (pour les plaques et coques), qui sont traités de manière similaire à la MMC, aux effets de flexion, qui sont traités spécifiquement.

Pour la partie flexion, la simplification géométrique induit une définition particulière des déformations, ce qui entraîne pratiquement des expressions différentes de l'opérateur de dérivation ***D*** selon les cas. Une autre conséquence porte sur la définition des inconnues aux nœuds : en effet, alors qu'en MMC, les inconnues sont les composantes du déplacement, en RdM, on est amené à rajouter des inconnues correspondant aux rotations, puisqu'il n'est plus possible de les évaluer directement à partir des déplacements aux nœuds en raison de la simplification géométrique. Le choix initial de traiter le problème posé en MMC ou RdM implique donc le choix d'éléments finis dans des familles différentes ; il est de plus *a priori* interdit de les mélanger car, à l'interface entre éléments de natures différentes, on se retrouve avec des rotations non transmises, sauf disposition spécifique. De plus, les contraintes calculées sur ces éléments sont en général des contraintes généralisées (ou efforts de la RdM : effort normal, tranchant, moment de torsion, fléchissant). Pour obtenir les contraintes (de la MMC) en un point, il est nécessaire de fournir des informations supplémentaires (position dans la section de la poutre par exemple).

Dans ce cadre, le choix d'un élément fini présente une difficulté supplémentaire liée à la prise en compte ou pas de l'énergie de cisaillement (éléments de poutre de Euler-Bernoulli ou de Timoschenko, éléments de plaque de Love-Kirchoff ou de Reissner-Mindlin), ce choix étant lié à des considérations géométriques (élancement de la section de la poutre ou épaisseur de la plaque). De plus, dans le cas où on choisit de prendre en compte l'énergie de cisaillement, des problèmes numériques peuvent intervenir (blocage en cisaillement), qui rendent certains éléments finis d'utilisation délicate

L'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli permet de représenter exactement un moment fléchissant variant linéairement le long de la fibre moyenne d'un élément (les fonctions de forme étant de degré 3 pour les déplacements de flexion et le moment obtenu par dérivée seconde des déplacements) : il n'est donc pas utile de mettre plusieurs éléments entre nœuds chargés par des forces ponctuelles (alors qu'il faut mailler finement lorsque le chargement est réparti entre 2 points).

Enfin, pour les éléments de plaque et coque, la convergence monotone n'est pas toujours assurée selon la forme du maillage, ce comportement étant lié à la formulation même des éléments. Ce type de comportement est illustré sur la figure ci-dessous, montrant l'évolution de l'erreur relative sur la flèche ω et le moment Mx en fonction du logarithme du nombre de degrés de liberté (dans le cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses quatre côtés soumise à une charge uniforme) : en vert, un élément non-conforme (COQ3) dont les résultats sont bien moins précis qu'un élément conforme (DKT), et de plus dont la convergence n'est pas monotone (pour les moments Mx sur la figure) : plus d'éléments conduit paradoxalement à un résultat qui peut être moins précis !

Plaque en flexion : convergence (flèche ω et moment Mx) en fonction du log du nombre de degrés de liberté

Ce domaine, particulièrement important en génie civil, présente donc des difficultés spécifiques qui seront développées dans les prochains chapitres.

2) Calculs bidimensionnels

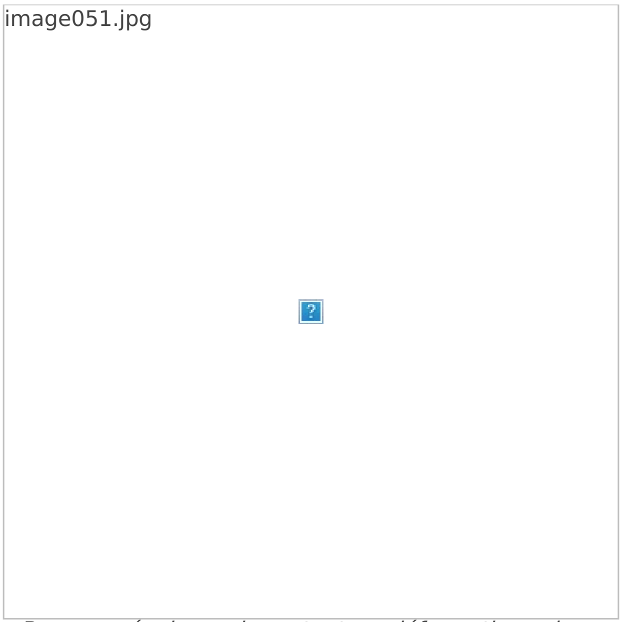
Les problèmes étudiés sont par nature tridimensionnels ; cependant, il est plus rapide d'effectuer des calculs bidimensionnels. Dans certains cas, il est possible de ramener l'étude d'un problème tridimensionnel à celui d'un problème bidimensionnel :

- si le problème admet un axe de révolution (pour la géométrie, le chargement et les conditions aux limites) : il est possible de faire un calcul axisymétrique pour lequel aucune hypothèse supplémentaire n'est faite ; dans le cas où le chargement n'est pas axisymétrique, il est possible de le décomposer en séries de Fourier et de traiter le problème initial par superposition de calculs axisymétrique ;

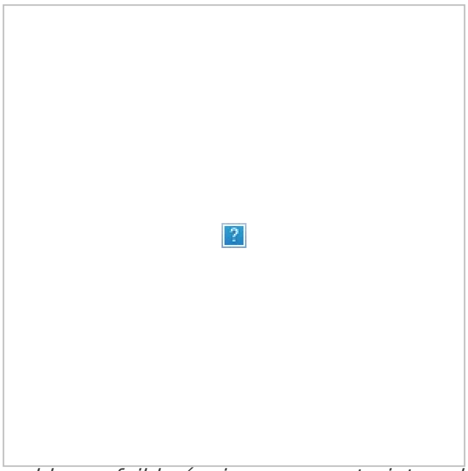
image050.jpg

Cylindre sous pression ➡ axisymétrie

- si on fait l'hypothèse de négliger les contraintes ou les déformations hors plan selon que la structure a une épaisseur très faibles ou très importante : on se place donc en hypothèse de contraintes planes ou de déformations planes respectivement ; la solution obtenue est alors une approximation du problème tridimensionnel. Il faut garder en tête qu'en contraintes planes, les déformations hors plan sont non nulles (idem en déformations planes pour les contraintes hors plan).



Barrage : épaisseur importante ➡ déformations planes



Assemblage : faible épaisseur ➡ contraintes planes

3) Prise en compte de symétries

Certains problèmes présentent des symétries (axe de symétrie, plan de symétrie…) et il peut être intéressant d'en profiter pour rendre les calculs par éléments finis plus rapides. Il faut cependant se souvenir que la résolution ne fournira que des solutions elles-mêmes symétriques (notamment lors de calculs de modes propres).

Pour cela, il est important d'avoir en tête que, comme mentionné ci-dessus, la symétrie doit concerner aussi bien la géométrie, que le chargement et les conditions aux limites pour pouvoir être prise en compte dans le calcul. La solution de la partie de la structure modélisée ne représentera cependant la solution du problème complet que si les conditions de symétrie sont intégrées au modèle. En mécanique des solides (MMC), celles-ci consistent à imposer que les composantes du déplacement perpendiculaires à l'axe/au plan de symétrie sont nulles. En RdM, il convient de penser à ajouter la condition de nullité des rotations autour de l'axe perpendiculaire à l'axe/au plan de symétrie. Enfin, la prise en compte de la symétrie peut avoir des conséquences sur le chargement : par exemple, il faut penser à n'appliquer que la moitié de l'intensité d'une charge ponctuelle appliquée sur un axe de symétrie.

Révision #2
Créé 8 December 2023 10:42:53 par Paul Terrasson Duvernon
Mis à jour 12 December 2023 10:44:00 par Paul Terrasson Duvernon